Enfin $2h'(x) = f(x)$.

$\boxtimes\ \forall x \in IR; \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2h'(x)dx = 2[h(x)]_0^x$

$= 2h(x) - 2h(0) = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II]1/a- $F_1(x) = \int_0^x f^1(t)dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[2h(x) - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$

b- $\forall t \in IR; K'(t) = \frac{(e^t + e^{-t})(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}$

$= \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} = \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}}\right)^2 = f^2(t)$.

$\boxdot\ F_2(x) = \int_0^x f^2(t)dt = \int_0^x K'(t)dt = [k(t)]_0^x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

$\otimes\ \lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = 1$.

2/a- F_n est la primitive de f^n sur IR^+ qui s'annule en 0

$\Rightarrow \forall x \in IR; F_n'(x) = f^n(x) > 0$

D'où F_n est continue et strictement croissante sur IR^+

Par suite $F_n([0;+\infty[) = [F_n(0); \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)[= [0; \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)[$.

b- $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) - 2e^{-t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} - \frac{2}{e^t}$

$= 2\frac{e^t - e^t - e^{-t}}{e^t(e^t + e^{-t})} = 2\frac{-e^{-t}}{e^t(e^t + e^{-t})} < 0$

$\Rightarrow \forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) < 2e^{-t}$.

D'après **I]1/a-** on a $\forall t \in IR;\ 0 < f(t) \le 1$

$\Rightarrow \forall t \in IR^+; 0 < f(t) \le 1$ donc $\forall n \in IN, \forall t \in IR^+; f^{n-1}(t) \le 1$

De plus $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) < 2e^{-t}$

Alors on peut conclure que $\forall t \in IR_+^*$ on a $f^n(t) \le 2e^{-t}$.

Par suite $\forall x \in IR^+, \int_0^x f^n(t)dt \le 2\int_0^x e^{-t}dt$.

$\Leftrightarrow \forall x \in IR^+, F_n(x) \le 2[-e^{-t}]_0^x = 2(-e^{-x} + 1)$.

D'autre par $\forall x \in IR^+, -e^{-x} < 0$ donc $\forall x \in IR^+, 2(-e^{-x}+1) < 2$

En conclusion : $\forall x \in IR^+, F_n(x) \le 2$.

On sait que F_n est croissante sur IR de plus elle est majorée par 2 donc elle possède une limite finie en $+\infty$.

c- $\forall t \in IR_+^*;\ e^{-t} < e^t \Rightarrow \forall t \in IR_+^*;\ e^{-t} + e^t < 2e^t$

$\Leftrightarrow \forall t \in IR_+^*;\ \frac{1}{e^{-t} + e^t} > \frac{1}{2e^t}$

$\Leftrightarrow \forall t \in IR_+^*;\ f(t) = \frac{2}{e^{-t} + e^t} > \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.

• $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) > e^{-t} \Rightarrow \forall t \in IR_+^*; \forall n \in IN^*;\ f^n(t) > e^{-nt}$

D'où $\forall x \in IR_+^*; \forall n \in IN^*$ on a $\int_0^x f^n(t)dt \ge \int_0^x e^{-nt}dt$